Lomené výrazy I.

podmínky, rozšiřování, krácení

1. Lomený výraz, podmínka existence LV

Lomené výrazy jsou výrazy ve tvaru zlomku, v jehož jmenovateli je proměnná, například:

$$\frac{3}{x};\quad \frac{x+1}{x-2};\quad \frac{y}{2x^2-y+5};\quad \frac{a^2-ab+b^2}{a+b};\quad -\frac{1}{3r+1};\quad \frac{9s^2(1-s)}{12s(s-1)}$$

Počítání s lomenými výrazy má podobné vlastnosti jako počítání se zlomky. Proto si tuto souvislost budeme u jednotlivých operací připomínat.

Určování podmínek, pro něž má lomený výraz smysl:

Zlomek má smysl, když jeho jmenovatel je různý od nuly. (*Nulou nelze dělit!*)

Lomený výraz má smysl pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je výraz ve jmenovateli různý od nuly. (*Nulou nelze dělit!*)

Motivační příklady: Určete, pro které hodnoty proměnných má lomený výraz smysl.

Příklad 1: $\frac{4-x}{2x+3}$ výraz má smysl, je-li výraz $2x + 3 \neq 0$

$2x \neq -3$

$\mathbf{x \neq -3/2}$

Příklad 2: $\frac{1}{y^2-x^2}$ výraz má smysl, je-li výraz $y^2 - x^2 \neq 0$

$(y + x) \cdot (y - x) \neq 0$

$(y + x) \neq 0$ a $(y - x) \neq 0$

$\mathbf{x \neq -y}$ a $\mathbf{x \neq y}$

Příklad 3: $\frac{1-y^2}{1+y^2}$ výraz má smysl, je-li výraz $1 + y^2 \neq 0$

tento výraz bude vždy kladný, protože druhá mocnina každého čísla je číslo kladné. Proto má výraz smysl pro **všechna y**.

Pro stručné vyjadřování je výraz různý od nuly nebo nenulový výraz ten, z kterého jsou vyloučeny hodnoty proměnných, po jejichž dosazení je číselná hodnota výrazu rovna nule. (výraz $7 - x$ je nenulový pro $x \neq 7$, výraz $5y^2$ pro $y \neq 0$,…).

Několik cvičení pro osvojení učiva o podmínkách existence LV:

1. Cvičení: $\frac{x}{2x-6}$ $2x - 6 \neq 0; \quad x \neq 3$
2. Cvičení: $\frac{x}{2x+6}$ $2x + 6 \neq 0; \quad x \neq -3$
3. Cvičení: $\frac{x}{x^2-4}$ $x^2 - 4 \neq 0; \quad x \neq \sqrt{4}; \quad x \neq \pm 2$
4. Cvičení: $\frac{x}{x^2+4}$ $x^2 + 4 \neq 0; \quad x^2 \neq -4$
   !!!splněno pro všechna reálná čísla!!!
5. Cvičení: $\frac{x-y}{5x-3}$ $5x - 3 \neq 0; \quad x \neq 3/5$
6. Cvičení: $\frac{x-y}{5x-3y}$ $5x - 3y \neq 0; \quad 5x \neq 3y; \quad x \neq 3y/5$
7. Cvičení: $\frac{x}{x^2-y^2}$ $x^2 - y^2 \neq 0; \quad (x - y).(x + y) \neq 0; \ x \neq \pm y$
8. Cvičení: $\frac{x}{9x^2-4y^2}$ $9x^2 - 4y^2 \neq 0; \quad (3x-2y).(3x+2y) \neq 0;$
   $x \neq \pm 2y/3$
9. Cvičení: $\frac{y}{18x-2xy^2}$ $18x - 2xy^2 \neq 0; \quad 2x \,.\, (9 - y^2) \neq 0;$
   $x \neq 0 \quad x \neq \pm 3$
10. Cvičení: $\frac{x-5}{2x^2-4x}$ $2x^2 - 4x \neq 0; \quad 2x \,.\, (x - 2) \neq 0;$
    $x \neq 0 \quad x \neq 2$

2. Krácení a rozšiřování lomených výrazů

Zlomek se nezmění, když se jeho čitatel i jmenovatel vynásobí nebo vydělí stejným nenulovým číslem.

Lomený výraz se nezmění, když se jeho čitatel i jmenovatel vynásobí nebo vydělí stejným nenulovým výrazem.

Krácení lomených výrazů představuje zjednodušení (úpravu) těchto výrazů, aniž by se změnila hodnota lomeného výrazu.

Jedná se o dělení výrazu v čitateli i ve jmenovateli nejvhodnějším společným dělitelem.

Jednočleny v lomených výrazech můžeme krátit přímo, protože představují vlastně násobení.

Motivační příklady:

Příklad 1: $\frac{8x^3}{4x^2}$ pro x ≠ 0; společným dělitelem je $4x^2$, výsledkem je **2x**

Příklad 2: $\frac{72x^2y^4z^3}{84x^3y^4z}$ pro x ≠ 0, y ≠ 0, z ≠ 0; společný dělitel je výraz $12.x^2.y^4.z$

Výsledkem je $\frac{6.z^2}{7.x}$

Je–li v čitateli i ve jmenovateli více členů ve tvaru sčítání nebo odčítání, ***nelze*** provádět krácení!!! Čitatele, popřípadě i jmenovatele, nutno rozložit na součin buď vytýkáním, pomocí vzorců, atd. a potom teprve krátit.

Příklad 3: Zjednodušte výraz: $\frac{18a - 30}{12a^2 - 20a}$

Podmínka pro řešení: $12a^2 - 20a \neq 0$

$4a \cdot (3a - 5) \neq 0$

$a \neq 0$; $a \neq 5/3$

$$\frac{18a - 30}{12a^2 - 20a} = \frac{6.(3a - 5)}{4a.(3a - 5)} = \frac{3.2.(3a - 5)}{2.2a.(3a - 5)} = \frac{3}{2a}$$

Několik cvičení pro osvojení učiva o rozšiřování LV:

Cvičení 1: Rozšiř výrazem v závorce $\frac{3}{5p}(2p)$

$$\frac{3}{5p} = \frac{3.2p}{5p.2p} = \frac{6p}{10p^2} \qquad p \neq 0$$

Cvičení 2: Rozšiř výrazem v závorce $\frac{4p}{2-3p}(-1)$

$$\frac{4p}{2-3p} = \frac{4p.(-1)}{(2-3p).(-1)} = \frac{-4p}{-2+3p} = \frac{-4p}{3p-2} \qquad p \neq \frac{2}{3}$$

__Cvičení 3:__ Rozšiř výrazem v závorce $\dfrac{-7p}{5p-4}(-3p)$

$$\frac{-7p}{5p-4}=\frac{-7p.(-3p)}{(5p-4).(-3p)}=\frac{21p^2}{-15p^2+12p}=\frac{21p^2}{12p-15p^2} \qquad p\neq\frac{4}{5}$$

__Cvičení 4:__ Doplňte, aby platila rovnost $\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{\quad}{x^2-y^2}$

$$\frac{x-y}{x+y}=\frac{\quad}{(x+y).(x-y)} \Longrightarrow \frac{x-y}{x+y}=\frac{(x-y).(x-y)}{(x+y).(x-y)}$$

$$\frac{x-y}{x+y}=\frac{(x-y)^2}{(x^2-y^2)} \qquad \begin{matrix} x\neq -y \\ x\neq y \end{matrix}$$

__Cvičení 5:__ Doplňte, aby platila rovnost $\dfrac{2x-5}{2x+5}=\dfrac{\quad}{4x^2+20x+25}$

$$\frac{2x-5}{2x+5}=\frac{\quad}{4x^2+20x+25} \Longrightarrow \frac{2x-5}{2x+5}=\frac{\quad}{(2x+5)^2}$$

$$\frac{2x-5}{2x+5}=\frac{\quad}{(2x+5).(2x+5)} \Longrightarrow \frac{2x-5}{2x+5}=\frac{(2x-5).(2x+5)}{(2x+5).(2x+5)}$$

$$\frac{2x-5}{2x+5}=\frac{4x^2-25}{4x^2+20x+25} \qquad x\neq-\frac{5}{2}$$

__Cvičení 6:__ Najděte společného jmenovatele a rozšiřte $\dfrac{2+x}{x^2-x}$; $\dfrac{-5}{4x-4}$

$$\frac{2+x}{x^2-x}=\frac{2+x}{x.(x-1)} \qquad \frac{-5}{4x-4}=\frac{-5}{4.(x-1)}$$

$$\frac{2+x}{x^2-x}=\frac{4.(2+x)}{4.x.(x-1)} \qquad \frac{-5}{4x-4}=\frac{-5.x}{4.x.(x-1)}$$

$$x\neq 0 \qquad x\neq 1$$

__Cvičení 7:__ Najděte společného jmenovatele a rozšiřte $\dfrac{x+y}{2x-2y}$; $\dfrac{x-y}{2x+2y}$

$$\frac{x+y}{2x-2y}=\frac{x+y}{2.(x-y)} \qquad \frac{x-y}{2x+2y}=\frac{x-y}{2.(x+y)}$$

$$\frac{x+y}{2x-2y}=\frac{(x+y).(x+y)}{2.(x-y).(x+y)} \qquad \frac{x-y}{2x+2y}=\frac{(x-y).(x-y)}{2.(x+y).(x-y)}$$

$$\frac{x+y}{2x-2y}=\frac{(x+y)^2}{2.(x^2-y^2)} \qquad \frac{x-y}{2x+2y}=\frac{(x-y)^2}{2.(x^2-y^2)}$$

$$x\neq y \qquad x\neq -y$$

Cvičení 8: Najděte společného jmenovatele a rozšiřte $\frac{m-3}{3-m}$; $\frac{7m^2+21}{m^2-6m+9}$

$$\frac{m-3}{3-m} \qquad \frac{7m^2+21}{m^2-6m+9}=\frac{7.(m^2+3)}{(m-3)^2}$$

$$\frac{m-3}{3-m}=\frac{m-3}{(-1).(-3+m)}=\frac{3-m}{m-3} \qquad \frac{7m^2+21}{m^2-6m+9}=\frac{7.(m^2+3)}{(m-3).(m-3)}$$

$$\frac{m-3}{3-m}=\frac{(3-m).(m-3)}{(m-3).(m-3)} \qquad \frac{7m^2+21}{m^2-6m+9}=\frac{7.(m^2+3)}{(m-3).(m-3)}$$

$$m\neq 3$$

Několik cvičení pro osvojení učiva o krácení LV:

Cvičení 1: Zkraťte na základní tvar $\frac{5p^2+10p}{25p}$

$$\frac{5p^2+10p}{25p}=\frac{5p(p+2)}{25p}=\frac{p+2}{5} \qquad p\neq 0$$

Cvičení 2: Zkraťte na základní tvar $\frac{m^2n-mn^2}{2mn}$

$$\frac{m^2n-mn^2}{2mn}=\frac{mn.(m-n)}{2mn}=\frac{m-n}{2} \qquad m\neq 0 \quad n\neq 0$$

Cvičení 3: Zkraťte na základní tvar $\frac{3m^2}{6m-15m^2}$

$$\frac{3m^2}{6m-15m^2}=\frac{3m^2}{3m.(2-5m)}=\frac{m}{2-5m} \qquad m\neq 0 \quad m\neq\frac{2}{5}$$

Cvičení 4: Zkraťte na základní tvar $\frac{x^2-4}{(x-2)^2}$

$$\frac{x^2-4}{(x-2)^2}=\frac{(x-2).(x+2)}{(x-2)^2}=\frac{x+2}{x-2} \qquad x\neq 2$$

Cvičení 5: Zkraťte na základní tvar $\frac{r^2-64}{r^2-8r}$

$$\frac{r^2-64}{r^2-8r}=\frac{(r+8).(r-8)}{r.(r-8)}=\frac{r+8}{r} \qquad r\neq 0 \quad r\neq 8$$

Cvičení 6: Zkraťte na základní tvar $\frac{4u^2-4uv+v^2}{2uz-vz}$

$$\frac{4u^2-4uv+v^2}{2uz-vz}=\frac{(2u-v)^2}{z.(2u-v)}=\frac{2u-v}{z} \qquad z\neq 0 \quad u\neq\frac{v}{2}$$